ISSN 1810-0198. Вестник ТГУ, т. 14, вып. 4, 2009

УДК 517.911, 517.968

О ПРОДОЛЖАЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ВОЛЬТЕРРОВЫМ ОПЕРАТОРОМ И ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ [1]

© А. И. Булгаков, О. В. Филиппова

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; импульсные воздействия; обобщенное решение.

Аннотация: В работе сформулировано понятие обобщенного решения задачи Коши для функционально-дифференциального включения с вольтерровым по Тихонову многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению (разложимости) значений. Получены условия существования и продолжаемости локального обобщенного решения задачи Коши.

Одним из основных свойств для обобщенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, как сформулировано в монографии [1], должно быть свойство продолжаемости локальных решений. Максимально продолженные решения должны «дойти» до границы области определения правой части дифференциального уравнения, если область определения является ограниченной областью в $[a,b]\times\mathbb{R}^n$. Если же областью определения правой части уравнения является все произведение $[a,b]\times\mathbb{R}^n$, то максимально продолженные решения либо должны быть определены на всем отрезке $[a,b]$, либо «уйти в бесконечность». Здесь рассматривается функционально-дифференциальное включение с вольтеровым по А.Н. Тихонову оператором, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений (разложимостью) и импульсными воздействиями. Для него введено понятие обобщенного решения, которое обладает тем свойством, что локальное решение «не обрывается», а продолжается до максимально продолженного, которое может быть определено на всем отрезке $[a,b]$, если же оно не определено на всем $[a,b]$, то оно «уходит в бесконечность». Отметим, что дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями были исследованы в монографиях [2 – 4].

Пусть $\mathcal{U}\in[a,b]$ – измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})}=\int\limits_{\mathcal{U}}|x(s)|ds$.

Пусть $\Phi\subset\mathbf{L}_1^n[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению* (*разложимо*), если для любых $x,y\in\Phi$ и любого измеримого множества $e\subset[a,b]$ выполняется включение $\chi_{(e)}x+ + \chi_{([a,b]\setminus e)}y\in\Phi$, где $\chi_{(\cdot)}$ – характеристическая функция соответствующих множеств.

Обозначим через $\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ $(Q(\mathbf{L}_1^n[a,b]))$ множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями) подмножеств пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$.

Пусть $\mathbf{X}$ – нормированное пространство с нормой $\|\ \|_{\mathbf{X}}$. Обозначим $\rho_{\mathbf{X}}[x;U]$ – расстояние от точки $x\in\mathbf{X}$ до множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h^+_{\mathbf{X}}[U_1;U]\equiv\sup\limits_{x\in U_1}\rho_{\mathbf{X}}[x,U]$ – полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1\subset\mathbf{X}$ от множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h_{\mathbf{X}}[U_1;U]= =\max\{h^+[U_1;U];h^+[U;U_1]\}$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (№ 07-01-00305, 09-01-97503), научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы"(РНП № 2.1.1/1131) и включена в Темплан № 1.6.07.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, ..., $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$, $\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ – множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,b]$. Если $\tau \in (a,b]$, то $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ – это пространство функций $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$, являющихся сужениями на отрезок $[a,\tau]$ элементов из $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ с нормой$\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,\tau]\}$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть Φ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}^n_1[a,b]$. Обозначим через $sw\Phi$ совокупность всевозможных конечных комбинаций

$$y = \chi(\mathcal{U}_1)x_1 + \chi(\mathcal{U}_2)x_2 + \ldots + \chi(\mathcal{U}_m)x_m,$$

элементов $x_i \in \Phi, i = 1,2,\ldots,m$, где непересекающиеся измеримые подмножества $\mathcal{U}_i$, $i = 1,2,\ldots,m$ отрезка $[a,b]$, удовлетворяют условию $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i = [a,b]$. Пусть далее, $\overline{sw}\Phi$ замыкание множества $sw\Phi$ в пространстве $\mathbf{L}^n_1[a,b]$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)),\ k = 1,\ldots,m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией и найдется такое отображение $P : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, принимающее нулевое значение на диагонали $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, и непрерывное по второму аргументу на ней, что для любых $x,y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется оценка

$$h^+{}_{\mathbf{L}^n_1(\mathcal{U})}[\Phi(x),\Phi(y)] \leqslant \|P(x,y)\|_{\mathbf{L}^1_1(\mathcal{U})}. \tag{4}$$

Отметим, что правая часть включения (1) может не обладать свойством выпуклости по переключению значений. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k+0) - x(t_k)$, $k = 1,2,...,m$.

О п р е д е л е н и е 2. Под *обобщенным решением задачи* (1)-(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \overline{sw}\Phi(x)$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{5}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1,2,...,m$, удовлетворяют равенствам (2).

Отметим, что согласно [5], если множество $\Phi(x)$ в (1) выпукло по переключению, то обобщенное решение задачи (1)-(3) совпадает с классическим решением (см. также [6]).

Нужно отметить, что к задаче (1)-(3) сводятся, например, математические модели сложных многокомпонентных систем автоматического управления с импульсными воздействиями, в которых в связи с отказом того или иного устройства объект регулирования переходит с одного закона управления на другой (регулируется разными правыми частями). Так как отказы (переключения) могут происходить в любые моменты времени, и при этом должно быть гарантировано управление объектом, то модель должна учитывать все возможные траектории (состояния), соответствующие любым переключениям. Обобщенные решения задачи (1)-(3) и составляют множество всех таких траекторий.

По заданному отображению $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ определим многозначный оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ равенством

$$\widetilde{\Phi}(x) = \overline{sw}\Phi(x). \tag{6}$$

Отображение $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ будем называть *«овыпукленным» по переключению отображением.*

Определение 3. Будем говорить (см. [7]), что оператор Φ *вольтерров по А.Н. Тихонову* (или *вольтерров*), если из условия $x|_\tau = y|_\tau$, $\tau \in (a,b)$, следует равенство $(\Phi(x))|_\tau = (\Phi(y))|_\tau$, где $z|_\tau-$ сужение функции $z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ на отрезок $[a,\tau]$, $(\Phi(z))|_\tau-$ множество сужений функций из множества $\Phi(z)$ на отрезок $[a,\tau]$.

Далее предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ (правая часть включения (1)) вольтерров, тогда оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенный равенством (6), также вольтерров. Кроме того, в силу оценки (4), оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ полунепрерывен снизу (см. [6]).

Пусть $\tau \in (a,b]$. Определим непрерывное отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ равенством

$$(V_\tau(x))(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad t \in [a,\tau]; \\ x(\tau), & \text{если} \quad t \in (\tau,b]. \end{cases} \tag{7}$$

Определение 4. Будем говорить, что функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ является *обобщенным решением задачи* (1)-(3) *на отрезке* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, если существует такое $q \in (\widetilde{\Phi}(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{k: t_k \in [a,\tau]} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{8}$$

где отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенством (7), $\Delta(x(t_k))$ $(k : t_k \in [a,\tau])$ удовлетворяют равенствам (2).

Далее, будем говорить, что функция $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ является *обобщенным решением задачи* (1)-(3) *на* $[a,c)$, если для любого $\tau \in (a,c)$ сужение $x|_\tau \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$, и найдется такая функция $q : [a,c) \to \mathbb{R}^n$, что для любого $\tau \in [a,c)$ $q|_\tau \in (\widetilde{\Phi}(V_\tau(x)))|_\tau$, и для любого $t \in [a,c)$ имеет место равенство (8), где $t_k \in [a,c)$.

Обобщенное решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3) будем называть *непродолжаемым* (*максимально продолженным*), если не существует такого обобщенного решения y задачи (1)-(3) на $[a,\tau]$, (здесь $\tau \in (c,b]$, если $c < b$ и $\tau = b$, если $c = b$), что для любого $t \in [a,c)$ выполнено равенство $x(t) = y(t)$.

Обобщенное решение задачи (1)-(3) считается *непродолжаемым.*

Теорема 1. *Найдется такое $\tau \in (a,b]$, что обобщенное решение задачи* (1)-(3) *существует на отрезке* $[a,\tau]$.

Теорема 2. *Для того чтобы обобщенное решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи* (1)-(3) *было продолжаемым на $[a,\tau]$, $(\tau \in [c,b])$, необходимо и достаточно, чтобы* $\varlimsup\limits_{t \to c-0} |x(t)| < \infty$.

Теорема 3. *Если y – обобщенное решение задачи* (1)-(3) *на $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, то существует непродолжаемое решение x задачи* (1)-(3), *определенное либо на $[a,c)$ $(c \in (\tau,b])$, либо на $[a,b]$ такое, что при всех $t \in [a,\tau]$ выполнено равенство $x(t) = y(t)$.*

Пусть $H(x_0,\tau)$ – множество всех обобщенных решений задачи (1)-(3) на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in \in (a,b])$.

Будем говорить, что множество всех локальных обобщенных решений задачи (1)-(3) *априорно ограничено,* если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a,b]$ не существует обобщенного решения $y \in H(x_0,\tau)$, для которого выполняется неравенство $\|y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} > r$.

Из теорем 1-3 вытекает:

Т е о р е м а 4. *Пусть множество всех локальных обобщенных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограничено. Тогда для любого* $\tau \in (a,b]$ *множество* $H(x_0,\tau) \neq \varnothing$, *и существует такое* $r > 0$, *что для каждых* $\tau \in (a,b]$, $y \in H(x_0,\tau)$ *выполняется неравенство* $\|y\|_{\mathbf{C}^n[a,\tau]} \leqslant r$.

О п р е д е л е н и е 5. Будем говорить, что отображения $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ и $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$, если найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}_+{}^1[a,b] \to \mathbf{L}_+{}^1[a,b]$ и неубывающие непрерывные функции $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1,2,\ldots,m$, для которых справедливы условия: для любой функции $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и произвольного измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(x)\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \|\Gamma(Zx)\|_{L^1(\mathcal{U})};$$

для любого $k = 1,2,\ldots,m$ и произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место оценка $|I_k(x)| \leqslant \widetilde{I}_k(|x|)$; множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = \Gamma(y), \quad \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad y(a) = |x_0|$$

априорно ограничено.

Здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ определено равенством $(Zx)(t) = |x(t)|$.

Т е о р е м а 5. *Пусть отображения* $\Phi : \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b] \to Q(\boldsymbol{L}^n[a,b])$ *и* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$ *обладают свойством* $\mathcal{A}$. *Тогда для любого* $\tau \in (a,b]$ *множество* $H(x_0,\tau) \neq \varnothing$, *и существует такое* $r > 0$, *что для любых* $\tau \in (a,b]$ *и* $y \in H(x_0,\tau)$ *выполняется неравенство* $\|y\|_{\widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,\tau]} \leqslant r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.
3. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
4. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.
5. *Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. Матем., механика. 2005. № 1. С. 3-20.
6. *Пучков Н.П., Булгаков А.И., Григоренко А.А., Коробко А.И., Корчагина Е.В., Мачина А.Н., Филиппова О.В., Шлыкова И.В.* О некоторых задачах функционально-дифференциальных включений // Вестник ТГТУ. 2008. Т. 14. №4. С. 947-974.
7. *Тихонов А. Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюллетень Московского университета. Секция А. 1938. Т. 68. № 4. С. 1-25.

Abstract: In the work the concept of generalized solution of the Cauchy problem for a functional-differential inclusion with Volterra (in the sense of Tikhonov) multivalued map not necessarily convex-valued with respect to switching (dicomposable) is formulated. The conditions of existence and prolongability of a local generalized solution to the Cauchy problem are derived.

Key words: functional-differential inclusion; impulses; generalized solution.

Булгаков Александр Иванович
д. ф.-м. н., профессор
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Alexandr Bulgakov
doctor of phys.-math. sciences, professor
Tambov State University named after G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Филиппова Ольга Викторовна
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Olga Filippova
post-graduate student
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

УДК 517.927.4, 517.929, 517.977.1

О КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ [1]

© Е. О. Бурлаков

Ключевые слова: краевые задачи; управляемые системы; дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.

Аннотация: Получены утверждения о непрерывной зависимости от параметров решений общей краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения, исследована корректность конкретных краевых задач для управляемых систем с отклоняющимся аргументом.

В работах [1, 2] найдены условия непрерывной зависимости периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений от управления. Широкое применение уравнений с отклоняющимся аргументом для описания управляемых систем потребовало исследования корректности таких систем и, в частности, нахождения условий непрерывной зависимости периодических решений функционально-дифференциальных уравнений от значений управления и других параметров. Как известно, задача о периодических решениях уравнений эквивалентна краевой задаче.

В данной работе получены утверждения о непрерывной зависимости от параметров решений общей краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения. Результаты применены к исследованию конкретных краевых задач для управляемых систем с отклоняющимся аргументом. Доказаны утверждения, аналогичные результатам работ [1, 2].

Обозначения: R^n – пространство векторов, имеющих n действительных компонент, с нормой $|\cdot|$; μ – мера Лебега на $[a,b]$; $L([a,b],\mu,R^n)$ – пространство измеримых суммируемых функций $y:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|y\|_L=\int\limits_a^b |y(s)|ds$; $L_\infty([a,b],\mu,R^n)$ – пространство измеримых существенно ограниченных функций $y:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|y\|_{L_\infty}=\operatorname*{vraisup}\limits_{t\in[a,b]}|y(t)|$; $C([a,b],R^n)$ – пространство

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (№ 07-01-00305, 09-01-97503), научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы"(РНП № 2.1.1/1131) и включена в Темплан № 1.6.07.